2023 – Centres Etrangers Groupe 1 – Jour 2

Corrigé

1. **a.** Dans le repère $\left(A\,;\ \vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on a les points suivants :
H(0 ; 2 ; 2), M(3 ; 0 ; 1) et N(3 ; 1 ; 1).

b. On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

2. Dans le repère $\left(A\,;\ \vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

B(2 ; 0 ; 0) C(2 ; 2 ; 0) F(2 ; 0 ; 2)

Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz, son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$\begin{aligned} M_t \in (\text{BCF}) &\iff x_{M_t} = 2 \\ &\iff 3t = 2 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$x_P = 2$, $y_P = 2 - 2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $z_P = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Cela confirme $P\left(2\,;\ \dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{4}{3}\right)$

3. **a.** $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

b. $\text{PM} = \sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{14}{9}} = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$

c. On sait que $\overrightarrow{\mathrm{PM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PN}} = PM \times PN \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

On a donc $\dfrac{8}{9} = \dfrac{\sqrt{14}}{3} \times \dfrac{\sqrt{11}}{3} \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

d'où $\cos\left(\widehat{MPN}\right) = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$ soit $\widehat{MPN} \approx 50°$.

L'angle ne dépasse pas 55°, le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{\mathrm{EN}} \begin{pmatrix} x_{\mathrm{N}} - x_{\mathrm{E}} \\ y_{\mathrm{N}} - y_{\mathrm{E}} \\ z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_{\mathrm{E}} + t x_{\overrightarrow{\mathrm{EN}}} \\ y = y_{\mathrm{E}} + t y_{\overrightarrow{\mathrm{EN}}} \\ z = z_{\mathrm{E}} + t z_{\overrightarrow{\mathrm{EN}}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P.

2023 – Centres Etrangers Groupe 2 – Jour 1

Corrigé

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1 ; -3 ; 2), \qquad B(3 ; -2 ; 6) \quad \text{et} \quad C(1 ; 2 ; -4).$$

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan $\mathscr{P}$.

2. **a.** On a :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 13 + 1 \times (-16) + 4 \times (-9) = 52 - 16 - 36 = 52 - 52 = 0$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 13 + 5 \times (-13) + (-6 \times (-9) = 26 - 65 + 54 = 52 - 52 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$: il est normal à ce plan.

b. On sait que $M(x ; y ; z) \in \mathscr{P} \iff ax + by + cz + d = 0$ et que a, b et c sont les composantes d'un vecteur normal à ce plan donc par exemple $\vec{n}$.

On a donc $M(x ; y ; z) \in \mathscr{P} \iff 13x - 16y - 9z + d = 0$.

par exemple $C(1 ; 2 ; -4) \in \mathscr{P} \iff 13 \times 1 + 2 \times (-16) - 9 \times (-4) + d = 0 + d = 0 \iff 13 - 32 + 36 + d = 0 \iff 17 + d = 0 \iff d = -17$.

On a donc $M(x ; y ; z) \in \mathscr{P} \iff 13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point F(15 ; −16 ; −8) et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. La droite $\mathscr{D}$ étant orthogonale au plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathscr{P}$.

On a donc $M(x ; y ; z) \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{FM} = t\,\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$, soit $\left\{\begin{array}{lcl} x - 15 & = & 13t \\ y + 16 & = & -16t \\ z + 8 & = & -9t \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}$

4. Si $E(x ; y ; z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et au plan $\mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient les équations de la droite et celle du plan donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - 15 & = & 13t \\ y + 16 & = & -16t \\ z + 8 & = & -9t \\ 13x - 16y - 9z - 17 & = & 0 \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans l'équation du plan, on obtient :

$13(13t + 15) - 16(16t - 16) - 9(-9t - 8) - 17 = 0 \iff 169t + 195 + 256t + 256 + 81t + 72 - 17 = 0 \iff 506t + 506 = 0 \iff t = -1$.

En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, on obtient :

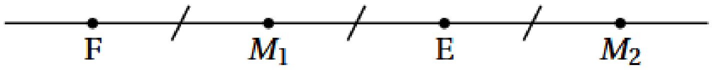
$$\left\{\begin{array}{lll} x-15 & = & -13 \\ y+16 & = & 16 \\ z+8 & = & 9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc E(2 ; 0 ; 1).

5. F et E appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, donc la distance du point F au plan est égale à FE.

Or $\text{FE}^2 = (-13)^2 + 16^2 + 9^2 = 169 + 256 + 81 = 506$. D'où $\text{FE} = \sqrt{506}$.

6. Comme précédemment si $M \in \mathscr{D}$ perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ la distance de ce point au plan $\mathscr{P}$ est ME.



- Premier point répondant à la question : M_1 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$, on déduit que $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_1}\begin{pmatrix} 6,5 \\ -8 \\ -4,5 \end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1-2 & = & 6,5 \\ y_1-0 & = & -8 \\ z-1 & = & -4,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & 8,5 \\ y_1 & = & -8 \\ z & = & -3,5 \end{array}\right.$$

- Deuxième point répondant à la question : M_2 tel que $\overrightarrow{\text{E}M_2} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

De $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$, on déduit que $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{E}M_2}\begin{pmatrix} -6,5 \\ 8 \\ 4,5 \end{pmatrix}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lll} x_2-2 & = & -6,5 \\ y_2-0 & = & 8 \\ z_2-1 & = & 4,5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_2 & = & -4,5 \\ y_2 & = & 8 \\ z_2 & = & 5,5 \end{array}\right.$$

Donc $M_1(8,5~;~-8~;~-3,5)$ et $M_2(-4,5~;~8~;~5,5)$.